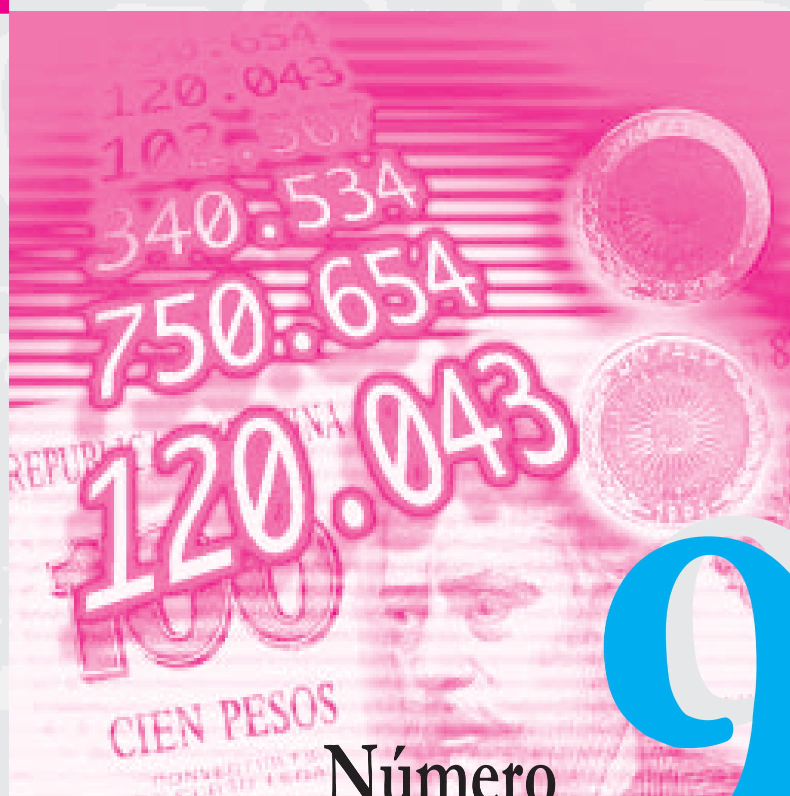
TEMARIO

- A modo editorial
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Regresión lineal usando Euler
- Una referencia histórica sobre la Economía Matemática en nuestro país

Boletín Matemático

Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

I I Σ M A



Número 9

Octubre 2002

Año 6

UNIVERSIDAD DE MORÓN

Registro de la propiedad intelectual ISSN 0329-0255

Autoridades de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Decano
Dr. Jorge Raúl Lemos

Vicedecano
Dr. Jorge Emilio Salvel

Secretario Académico
Dr. Osvaldo Luis Perillo

Secretaria Adjunta
Dra. Amanda Raquel Llistosella

Consejeros del Honorable Consejo Académico
de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Dr. Miguel Gregorio Skubic
Dra. Norma Beatrízi Irigoyen
Dr. Raúl Roque Orellano
Lic. Luis Antonio Leo
Dr. Sergio Andrés Ghedin
Dr. Domingo José Mazza

Representante de Profesores ante el H. C. S.
Dr. Juan Carlos Lavignolle

Directores de Carrera:
Dr. Isaac Aizik Senderovich (Contador Público)
Dr. Miguel Gregorio Skubic (Licenciatura en Administración)
Lic. Enrique Hugo Ventura (Licenciatura en Economía)
Lic. Carlos Ferreras (Licenciatura en Comercialización /
Técnico Superior en Comercialización)
Lic. Hugo Santiago Pavón Castex (Licenciatura en Recursos Humanos /
Analista Universitario en Recursos Humanos)
Lic. Luis Antonio Leo (Licenciatura en Relaciones Públicas /
Analista Universitario en Relaciones Públicas)
Dra. Amanda Raquel Llistosella (Licenciatura en Seguros / Técnico Superior en Seguros)
Lic. Guillermo José Garberi (Tecnicatura en Comercialización Minorista)

Directores de Institutos de Investigación:
• Instituto de Investigaciones Contables
Dir.: Dr. Isaac Aizik Senderovich
• Instituto de Investigaciones Economicas
Dir.: Dr. Alfredo Eduardo Villafañe
Subdirector: Lic. José Luis Iparraguirre D'elia
• Instituto de Investigaciones Administrativas
Dir.: Dr. Omar Antonio Pertierra
• Instituto de Investigaciones de Matemática Aplicada
Dir.: Ing. Santos Dario Soldano
• Instituto de Investigaciones Tributarias
Dir.: Dr. Juan Ferrari Herrero
Subd.: Dr. Alfredo Destuniano
• Instituto de Metodologia Jurídica Aplicada en las Ciencias Económicas
Dir.: Dr. Eduardo Mario Favier-Dubois
• Instituto de Investigaciones de la Pequeña y Mediana Empresa
Dir.: Dr. Horacio Armando Irigoyen
• Instituto de Investigaciones de Humanidades y Ciencias Sociales Aplicadas
a las Ciencias Económicas y Empresariales
Dir.: Prof. Elvira Venturo

Departamentos Pedagógicos
• Departamento Pedagógico de Administración
Dir.: Dr. Jorge Eduardo Marcos
• Departamento Pedagógico de Contabilidad
Dir.: Dr. Jorge Raúl Lemos
• Departamento Pedagógico de Economía:
Dir.: Dr. Juan Carlos Lavignolle
• Departamento Pedagógico de Humanidades
Dir.: Elvira Venturo
• Departamento Pedagógico Jurídico
Dir.: Dr. Eduardo Mario Favier Dubois
• Departamento Pedagógico de Matemática
Dir.: Ing. Martín Adler
• Departamento Pedagógico de Comercialización
Dir.: Dr. Oscar Malfitano Cayuela

IMΣIA

Año 6 Número 9
Octubre 2002

A modo de Editorial

A modo de editorial

Inmersos en una crsis económica y social sin precedentes, nos encontramos transitando este año 2002.
En el ámbito de la investigación y de la docencia, al igual que en otras áreas del quehacer ciudadano, esta situación genera en sus partícipes una suerte de depresión que conspira contra el sostenimiento de los niveles de calidad y producción científica en Institutos y Universidades.
La emigración de profesionales e investigadores valiosos, por falta de expectativas locales, por frecuente, ya ha dejado de conmovernos.
En esta inestable primavera, que se asocia a la situación imperante, deberíamos intentar recuperar nuestro espíritu positivo e infundir en nuestros alumnos, en nuestros colaboradores y en nuestros hijos, una cuota de optimismo que aliente la esperanza y dé sustento a renovados proyectos.
Seguramente, en estos momentos de desconcierto, ayudará al intelecto, para fortalecer nuestro espíritu y serenar nuestra razón, la expresión de algún preclaro e indiscutido pensador.
En circunstancias complicadas, que afectan a la nación y sus instituciones, donde la educación es la fuerza más potente para el cambio y el crecimiento del país, RABINDRANATH TAGORE (*), opinaba que en la búsqueda de ambiciones nobles y elevadas, en los hombres se encuentra la disciplina. Seguramente la misma está presente en las grandes aspiraciones creadoras de la sociedad cuando quedan a un lado los impulsos y los deseos menores.
Imbuidos en nuestra problemática, seguramente, no dudaremos en leer con respeto y reflexionar sobre su trascendente mensaje lírico. Él decía:

Cuando la mente vence al miedo
y el corazón se mantiene alto

Cuando las palabras salen de lo hondo de la verdad

Cuando el claro hontanar de la razón no se ha perdido
en el desolado desierto de los hábitos muertos,
Cuando eres tú quien conduce la mente
hacia un pensamiento y una acción cada vez más vastos,
Al paraíso de la libertad
Padre, haz que mi país despierte.

(*) Premio Nobel de Literatura - 1913 -
Se ocupó de mejorar las Universidades en su país natal, India.
Vivió entre 1861 y 1941.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Eliminación de Gauss vs. Regla de Cramer

Por el Prof. Santiago Ferrari (*)

2.1.2.2.- El vector B no pertenece al subespacio generado por las columnas de A. Es el mismo caso que en 2.1.1.2, sólo que ahora $r < n$, lo cual es irrelevante a los efectos de la (no)solución del sistema.

Ejemplo 6.- Modificamos b_3 y b_4 del ejemplo anterior obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -5 & 8 \\ 5 & -1 & -11 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Nuevamente, surge claramente la incompatibilidad del sistema, que $r = 2$, y que $r' = 3$.

2.2.- $m < n$

En este caso, las columnas de A no pueden ser linealmente independientes ($r \leq m < n$): el sistema será, o bien *compatible indeterminado*, o bien *incompatible*.

2.2.1.- Las columnas de A generan todo R^m, o lo que es lo mismo, $r = m$ (existen sub conjuntos de n columnas de A linealmente independientes). El sistema tiene (infinitas) soluciones para todo $B^{(*)}$.

Al aplicar G.J. (con las permutaciones de columnas que sean necesarias) se obtiene:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{}^{m}\ \overbrace{}^{n-m} \\ m & \begin{array}{ccccc} 1 & 0 \ldots 0 & x & \ldots & x \\ 0 & 1 \ldots 0 & x & \ldots & x \\ & \ldots\ldots & & \ldots & \\ & \ldots\ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 \ldots 1 & x & \ldots & x \end{array} \end{array}$$

(*) Obsérvese que, en este caso, de (5) resulta forzosamente, que $r' = m$

Ejemplo 7

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & -10 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{-9} & -1 & 6 & -18 \\ 0 & 9 & 5 & -11 & 16 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/9 & -5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/9 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -25/36 & 7/18 \\ 0 & 1 & 0 & -19/36 & 37/18 \\ 0 & 0 & 1 & -5/4 & -1/2 \end{array}\right)$$

que explicita uno de los conjuntos infinitos de soluciones:

$x_1 = 7/18 + 25/36\, x_4$ (*)
$x_2 = 37/18 + 19/36\, x_4$
$x_3 = -1/2 + 5/4\, x_4$

2.2.2.- Las columnas de A generan un sub espacio de dimensión $r < m$, y el sistema tendrá solución cuando B pertenezca a dicho subespacio.

2.2.2.1.- B pertenece al subespacio generado por las columnas de A.

(*)Si x_4 es 0 entonces obtenemos lo que en Programación Lineal se conoce como Solución Básica. Por otra parte, si hubiéramos elegido disitintos pivotes (suponiendo esto posible), otra habría sido la solución básica y su conjunto asociado de soluciones obtenido.

Viene del *Boletín Matemático* Año 5 Nº 8

Ejemplo 8.-

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -8 & -31 & -23 \\ 2 & -5 & 11 & 55 & 44 \\ -4 & 1 & 5 & 7 & 2 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -8 & -31 & -23 \\ 0 & \boxed{-9} & 27 & 117 & 90 \\ 0 & 9 & -27 & -117 & -90 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -13 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ahora, la solución es:

$$x_1 = -3 + 2x_3 + 5x_4$$

$$x_2 = -10 + 3x_3 + 13x_4$$

2.2.2.2.- B no pertenece al subespacio generado por las columnas de A

Ejemplo 9.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -8 & -31 & -23 \\ 2 & -5 & 11 & 55 & 44 \\ -4 & 1 & 5 & 7 & 10 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -8 & -31 & -23 \\ 2 & \boxed{-9} & 27 & 117 & 90 \\ 0 & 9 & -27 & -117 & -82 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -13 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}$$

2.3.- m = n

2.3.1.- | A | = 0. *No se puede aplicar la R.C.*, como se ha explicado en *[2]* y luego ampliaremos. Las columnas de A son linealmente dependientes generando un sub espacio de dimensión r < n.
La aplicación de G.J. da por resultado una matriz de la forma

$$\begin{array}{c|l} & \quad r \qquad n-r \\ & 1\ 0\ ..\ 0\ x \ldots\ x \\ & 0\ 1\ ..\ 0\ x \ldots\ x \\ r & \ldots\ldots\ldots \\ & 0\ 0\ ..\ 1\ x \ldots\ x \\ & 0\ 0\ \ldots 0\ ..\ 0 \\ n-r & \ldots\ldots\ldots \\ & 0\ 0\ \ldots\ldots\ 0 \end{array}$$

2.3.1.1.- B pertenece al sub espacio generado por las columnas de A.

Ejemplo 10.

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 3 & 7 \\ -4 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 5 & -6 & -1 & 1 & 9 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & \boxed{-4} & 1 & 14 & 26 \\ 0 & -4 & 1 & 14 & 26 \\ 0 & 4 & -1 & -14 & -26 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -1/4 & -7/2 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2.3.1.2.- B no pertenece al subespacio generado por las columnas de A

Ejemplo 11.

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 3 & 7 \\ -4 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 5 & -6 & -1 & 1 & 10 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & \boxed{-4} & 1 & 14 & 26 \\ 0 & -4 & 1 & 14 & 26 \\ 0 & 4 & -1 & -14 & -25 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -1/4 & -7/2 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2.3.2.- $|A| \neq 0$. Las columnas de A son linealmente independientes y generan todo R^n, es decir, forman una base. Todo vector B perteneciente a R^n se puede expresar en la misma por medio de (únicas) coordenadas. En particular, las coordenadas -la solución del sistema- cumplen:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (7)$$

En definitiva, el sistema es *compatible determinado*. G.J. encuentra pivote válido en todos los pasos por lo que, al finalizar, queda la matriz identidad. Las mismas operaciones sobre B producen la solución, y sobre una matriz identidad, A^{-1}.

Ejemplo 12.- Podemos tomar como A las tres primeras columnas de la matriz del ejemplo 7 y como B la cuarta columna:

$$\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{-9} & -1 & 6 \\ 0 & 9 & 5 & -11 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7/9 & -5/3 \\ 0 & 1 & 1/9 & -2/3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -5 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -25/36 \\ 0 & 1 & 0 & -19/36 \\ 0 & 0 & 1 & -5/4 \end{array}$$

Finalmente, estamos en condiciones de aplicar la R.C. (ver enunciado, notación y demostración del teorema en el Apéndice)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-5)\cdot 1+0\cdot 1\cdot 1+1\cdot 2\cdot 1-1\cdot(-5)\cdot 1-1\cdot 1\cdot(-3)-1\cdot 0\cdot 2 = 25$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1+(-4)(-3)\cdot 1-(-4)\cdot 0\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1-1\cdot 2.(-3) = 19$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot 1+2\cdot 1\cdot(-3)+(-4)\cdot 2\cdot 0-(-4)(-5)(-3)-1\cdot 0\cdot 1-1\cdot 2\cdot 2 = 45$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1+(-4)\cdot 2\cdot 1-(-4)(-5)\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1-1\cdot 2\cdot 2 = -36$$

Por lo tanto $x_1 = 25/(-36)$; $x2 = 19/(-36)$; $x_3 = 45/(-36) = -5/4$

Del ejemplo anterior podría concluirse que R.C. es computacionalmente más sencillo que G.J. pero esto sólo es cierto para sistemas de dimensión 3 (lo es más aún para n = 2). Cuando n es grande, el número de operacones requeridas por la R.C es aproximadamente (n+1) veces mayor que las requeridas por la eliminación gaussiana. Más concretamente, para n grande hay que hacer aproximadamente el mismo número de operaciones para calcular el determinante de A por el método más eficiente, que las requeridas para resolver el sistema. Ver *[3]*.

3. Qué nos puede decir la R.C. y qué no, cuando $|A| = 0$.

3.1 El caso n = 2

Teorema 1.- Si en un sistema como en (1) , m = n = 2 y $|A| = 0$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $\Delta_1 = 0$

b) $\Delta_2 = 0$

c) el sistema es *compatible indeterminado*

Demostración:

Probaremos primero que a) y b) son equivalentes.

De la hipóstesis general $|A| = 0$, tenemos

$a_{11}/a_{21} = a_{12}/a_{22}$ (*)

De la hipótesis $\Delta_1 = 0$, tenemos

$a_{12}/a_{22} = b_1/b_2$;

luego, por carácter transitivo

$a_{11}/a_{21} = b_1/b2$,

que equivale a

$\Delta_2 = 0$

La inversa es inmediata.

Ahora mostraremos que a) $\wedge$ b) $\Leftrightarrow$ c)

Por hipótesis general $\Delta = 0$ y r = 1

Si, además, se cumplen a) y b), entonces r' = 1 y el sistema es *compatible indeterminado*.

(*) Estos denominadores no pueden ser nulos, de lo contrario, siendo $\Delta = 0$, no habría sistema de ecuaciones.

A la inversa, si el sistema es *compatible indeterminado*, entonces r' = 1, es decir, los determinantes de todas las submatrices de 2 x 2 de A|B deben ser nulos, esto es:

$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ Q.E.D.

Corolario. En las condiciones del teorema, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a') $\Delta_1 \neq 0$

b') $\Delta_2 \neq 0$

c´) el sistema es *incompatible*

Demostración: a'), b') y c') son, respectivamente, las contrarias de a), b) y c)

Por lo tanto, de la equivalencia de las primeras, surge la equivalencia de las segundas.

3.2.- El caso general

Una versión ligeramente distinta del corolario vale para n > 2:

Teorema 2.-(*) Si en un sistema como en (1) se cumple

a) m = n

b) | A | = 0

c) $\Delta j \neq 0$ para algún j (j=1,..,n) ,

entonces el sistema es *incompatible*

Demostración: De la hipótesis b) surge que r < n

Veamos que de la hipótesis c) surge que r' = n.

Efectivamente: Δj es el determinante de la matriz que resulta de reemplazar la columna j de A por B, y si este determinante, que es de orden n, es distinto de 0, el rango de A|B es n por definición.

Luego, por Rouché-Frobenius, el sistema es *incompatible*. Q.E.D.

La inversa de este teorema («si $\Delta_j = 0\ \forall j$, el sistema es *compatible indeterminado* ») no es cierta, en general, cuando n es mayor que 2.

Efectivamente, $\Delta_j = 0\ \forall j$ sólo asegura que r' < n, pero siendo n > 2, no hay forma de saber a priori si r' = r ó, r' = r + 1.

(*) Este teorema, al igual que la propia R.C., es valioso desde el punto de vista teórico, pero de nulo valor práctico. En efecto, nadie, ante un sistema, digamos, con n = 10 y Δ nulo, va a tomarse el trabajo de ir calculando los Δ_j especulando con encontrar uno no nulo: de no hallarlo, como se muestra inmediatamente, se queda con las manos vacías.

3.3.- Contraejemplo

En los Ejemplos 10 (sistema *compatible indeterminado*) y 11 (*sistema incompatible*) se cumple, *en ambos*

$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta = 0$

3.4.- Epílogo

Aún si pudiéramos averiguar que un sistema es *compatible indeterminado* mediante la R.C. – determinación que, como acabamos de ver, no es posible- nos seguiría faltando (por caso, en el Ejemplo 10) la siguiente información:

$x_1 = -6 + 1/2x_3 + 4x_4$

$x_2 = -13/2 + 1/4x_3 + 7/2x_4$

que G.J. entrega explícitamente en su última tabla:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -1/4 & -7/2 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

APÉNDICE

4.- Regla de Cramer.

Sea un sistema como en (1), con m = n.

4.1.- *Notación*. Llamaremos A(i|j) a la matriz de (n-1) x (n-1) que resulta de eliminar la fila i y la columna j a A.

A^t será la **matriz transpuesta** de A, esto es:

$a^t_{ij} = a_{ji}$ i,j=1,..., n

I(n) la **matriz identidad** de orden n, esto es:

$$I(n)_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1,\ldots, n$$

A^{-1} **la matriz inversa** a A, esto es, la matriz que cumple:

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I(n)$

adj(A) la **matriz adjunta** de A, esto es:

$$adj(A)_{ij} = (-1)^{j+i} \cdot |A(j|i)| \quad i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n \qquad (8)$$

4.2.- *Nocines básicas*.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A(i|j)| \qquad (9)$$

(desarrollo de Laplace por la columna j)

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} \qquad (10)$$

4.3.- *Teorema de Cramer.* Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, o sea, un sistema como en (1), con m = n. Sea $|A| \neq 0$. Llamemos
Δ a $|A|$ y
Δ_j al determinante de la matriz que resulta de reemplazar la columna j de A por B ; j=1,. . .,n
Entonces
La solución, única, de (1) es

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad ; \qquad j=1,...,n$$

Demostración: Que el sistema es *compatible determinado* ya los vimos en 2.3.2
De (7) y (10) resulta:

$$X = [\text{adj}(A) \div \Delta] \cdot B$$

Es decir, $X = [\text{adj}(A) \cdot B] \div \Delta$

Lo anterior es una ecuación entre dos matrices de n x 1. Luego, el elemento j-ésimo de ambos miembros debe satisfacer esta ecuación escalar:

$$x_j = \left[\sum_{r=1}^{n} adj\ (A)_{jr}\ .\ b_r \right] \div \Delta$$

Entonces, por (9) resulta:

$$x_j = \left[\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+j}\ .\ |A(r|j)\ |\ .\ b_0 \right] \div \Delta$$

Lo que está entre corchetes es el desarrollo, por la columna j, del determinante de la matriz que resulta de reemplazar a A^j por B. O sea,

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \cdot \qquad \text{Q.E.D.}$$

5.- El determinante de una matriz cuadrada como subproducto de la aplicación del Método de G.J.
Sea A una matriz de n por n con determinante distinto de 0. Si se aplica la transformación Gauss-Jordan sobre la matriz A n veces, tomando como pivotes los n elementos de la diagonal principal, entonces

$$|A| = (-1)^k \cdot \prod_{j=1}^{n} p_j$$

siendo:

k: el número de intercambios de filas empleados para encontrar pivote no nulo, $1 \leq k \leq n$
p_j: el pivote del j-ésimo paso

Demostración: No daremos una demostración formal de esta fórmula, pero puede aceptársela inmediatamente a partir de las siguientes consideraciones:

¨ La existencia de pivote no nulo en todo paso, si fuera necesario intercambiando la fila actual por una inferior, está asegurada por la hipótesis de que el determinante es no nulo: no hallar pivote aún intercambiando filas, pondría de manifiesto una columna nula.
¨ La única operación de G.J. que modifica el determinante es la que consiste en dividir la fila del pivote por éste y tiene como efecto, obviamente, que el determinante de la matriz de cada paso es el del paso anterior dividido por el pivote actual.
¨ La matriz resultante es la matriz identidad, cuyo determinante es 1.
¨ Cuando se intercambian dos filas, el determinante de la matriz cambia de signo.

Como verificación, podemos tomar la matriz del Ejemplo 12, cuyo determinante es -36; los pivotes -los elementos recuadrados de la matriz- 1, -9 y 4, y el número de intercambio de filas, 0.

Bibliografía

[1] *"Algebra Lineal" by Kenneth Hoffman and Ray Kunze, Prentice Hall*
[2] *"Usos y Abusos de la Regla de Cramer", revista* Propuestas*, nro. 3 Santiago Ferrari*
[3] "*Algebra Lineal Elemental*". R. Hill, Prentice Hall, 1996
[4] *Notas de Algebra II: Algebra Lineal.* Enzo R. Gentile. Editorial Docencia

(*) Profesor en Laboratorio de Cálculo y Estadística en diversas Facultades de la Universidad de Morón.

Regresión Lineal usando Euler

Por el Prof.
Gerardo D. Roozen (*)

El programa EULER, si bien no es un clon de MATLAB, lo reemplaza muy bien, y aunque en principio no tiene la cantidad de funciones preprogramadas de aquél, tiene la capacidad de programación suficiente como para poder ampliarlo según las necesidades, además es gratuito (puede descargarse la ultima versión disponible para Linux o Windows desde http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/euler/) y no es demasiado pesado (tan solo 841 Kb).

Pese a ser un programa tan pequeño, pose una gran capacidad de cálculo, apoyada en su capacidad para ser programado mediante archivos externos, de extensión ".e", los que pueden contener tanto funciones como secuencias de comandos.

Aprovechando esto, vamos a generar un archivo de programa con tres funciones que resuelvan elementos básicos de la regresión lineal múltiple, a las que llamaremos "beta", que estima los coeficientes de regresión por el método de mínimos cuadrados, "varcov", que calcula la matriz varianza covarianza de los coeficientes de la regresión , y "sigma", que calcula el valor S de la regresión.

El primer paso es generar, utilizando cualquier procesador de texto, el archivo "regresión.e", con los siguientes comandos:

```
function beta(x,y)
a=inv(x'.x);
b=a.x'.y;
return b
endfunction

function varcov(x,y)
a=inv(x'.x);
b=a.x'.y;
e=x.b-y;
nk=size(x);
n=nk(1);
k=nk(2);
s2=e'.e/(n-k);
v=s2*a;
return v
endfunction

function sigma (x,y)
a=inv(x'.x);
b=a.x'.y;
e=x.b-y;
nk=size(x);
n=nk(1);
k=nk(2);
s=sqrt(e'.e/(n-k));
return s
endfunction
```

que debe guardarse con formato de texto plano, en el directorio euler\progs, luego, para ejecutarlo, solo basta con crear las matrices correspondientes , cargar el programa que hemos creado y ejecutarlo. A continuación un ejemplo de la ejecución del mismo, donde se estimarán los coeficientes de la regresión $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e$:

```
>load «regresion»
>X=[1 2 3;1 3 7;1 4 9;1 7 11]
         1          2          3
         1          3          7
         1          4          9
         1          7         11

>Y=[4;6;7;9]
         4
         6
         7
         9
>b=beta (X,Y)
     2.11111
    0.388889
    0.377778
>varcov(X,Y)
    0.0209877    0.00123457   -0.00308642
   0.00123457    0.00432099   -0.00246914
  -0.00308642   -0.00246914     0.0017284
>sigma(X,Y)
    0.105409
```

Donde los resultados deben interpretarse como:

Coeficientes:

$\beta_0 = 2.11111$ (estimación de β_0)

$\beta_1 = 0.388889$ (estimación de β_1)

$\beta_2 = 0.377779$ (estimación de β_2)

quedando la regresión:

$\hat{Y} = 2.11111 + 0.388889\ X_1\ \ 0.377779\ X_2$

Matriz Varianza Covarianza:

La matriz VC de los coeficientes b quedan planeados de la siguiente forma:

	b_0	b_1	b_2
b_0	0.0209877	0.00123457	-0.0030864
b_1	0.00123457	0.00432099	-0.00246914
b_2	-0.00308642	-0.00246914	0.0017284

Donde, por ejemplo, 0.00432099 es la varianza del coeficiente b2, –0.00246914 es la covarianza entre los coeficientes b1 y b2, y asi sucesivamente.

Cabe aclarar que en el programa se repitieron secuencias de calculo para las distintas funciones solo por un tema de claridad didáctica, el mismo podría simplificarse con la declaración de variables globales y recursividad.

(*) Prof.Gerardo Daniel Roozen Jefe de Trabajos Prácticos Cátedra: Econometria I

Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Morón

Consultas groozen@unimoron.edu.ar

Una referencia histórica sobre la Economía Matemática en nuestro país

Por el prof. Alfredo Eduardo Villafañe (*)

El análisis económico, al constituirse en temas más profundos, al mismo tiempo que más densos y abstractos, permitió que las obras de algunos argentinos notables comenzaran a ser citadas y consideradas por premios Nobel. *Así, Barral Souto sería tenido en cuenta por Leontieff; Prebisch por Tinbergen; Olivera por Hicks; Sidrauski por Friedman y Mantel por Debreu.*

Para varios estudiosos de temas de *Economía Matemática* se ubicaría este análisis bajo tres etapas fundamentales: 1) etapa del uso del cálculo infinitesimal (1838-1947), 2) la del uso de la teoría de los conjuntos y modelos lineales (1948-1960) y 3) de integración de las tres técnicas (1961 en adelante).

Para el enunciado de estos tres periodos, hemos seguido a Arrow e Intriligator y para la evolución de los mismos a trabajos del economista argentino M. Fernández López. Los periodos posteriores, si bien no han sido claramente especificados, abarcarían una serie de teorías de gravitación en los tiempos actuales. Preferimos el tratamiento de las tres primeras etapas enunciadas, vinculadas a aportes de pensadores de Argentina:

a) Consideración del espacio (Economía Espacial).

Este tipo de estudio, se orienta a las formulaciones realizadas por el ingeniero Pedro A. Cerviño (1757-1816) quien, por encargo de Azara (1801) efectuó un viaje por nuestras tierras hacia el Río Paraná, levantando una carta del río desde su nacimiento hasta el Río de la Plata. Sus investigaciones *pueden expresarse en un sentido matemático*, tomando como objetivo al Paraná como transporte complementario al terrestre; en tal caso, el círculo del cultivo de cereales se prolongaba por la costa. Bajo la influencia de Manuel Belgrano, Cerviño exploró las posibilidades productivas de la pampa húmeda y su nexo por el transporte por agua.

El razonamiento implícito en su resultado era el siguiente:

Sean los precios:

$p = c + tr$ donde:

c = costo de los insumos agrícolas

tr = flete terrestre a la tarifa t, por unidad de distancia

r = distancia de la finca al centro, radio del círculo abierto

$x^2 + y^2 < r^2$, $r = k/t$; donde

k = costo total del transporte

La ciudad es atravesada por un río rectilíneo con tarifa $f < t$. A la distancia x de la ciudad. sobre el río, hay un lugar de embarque.

La nueva restricción del presupuesto es:

$k = t\,r' + f\,x'$

La máxima distancia terrestre a la tarifa t, con un gasto de $f\,x'$ en transporte fluvial, es r'

Al círculo de radio r, se añade un círculo de radio $r' < r$ que expande la superficie arable, dado k hasta la frontera:

$(x - x')^2 + y^2 = r^2 = (r - f\,x'/t)^2$

Si toda la costa es embarcadero, x' es una variable real y la anterior fórmula es una familia de circunferencias. La nueva superficie agraria es la envolvente de las circunferencias de radio r^{1}. Derivando con respecto a r, se obtienen ecuaciones paramétricas, y eliminando x' se obtienen las rectas de la envolvente, que forma la *nueva frontera agraria.*

b) Líneas de indiferencias y máximos hedónicos: En este aspecto es importante el punto de vista de Hugo Broggi, quien en 1919 pudo demostrar la existencia de la función de utilidad sobre los ejes del cuadrante no negativo. Tratemos de explicar este punto: se suponen dadas recíprocamente, las líneas de indiferencia MN, las cuales cubren totalmente la porción de plano correspondiente a

$a \geq, b \geq$ (I)

y expresan - independientemente de toda definición de utilidad - que cada una de ellas divide a la parte del plano (1) en dos partes, a una de las cuales el consumidor no iría libremente (la porción finita de plano encerrada por la línea de indiferencia y los dos segmentos finitos que la misma corta sobre los ejes coordenados) mientras que irá, siempre que pueda, a la otra.

A partir de las líneas de indiferencia, llegar a la noción de utilidad, definida como una función positiva de las cantidades a y b, implica que : 1) *a todo par de valores positivos, o nulos, (a, b) corresponda un valor de la utilidad $u = u(a, b)$, siendo $u(0, 0) = 0$*; 2) *sobre toda línea de indiferencia u tome valor constante*; 3) *si a una línea de indiferencia arbitraria corresponde el valor c_1 de u, de la primera de las dos partes del plano antes definida sea $u(a, b) \geq C_1$, y en ningún punto de la segunda parte del plano sea $u(a, b) \leq c_1$.*

Toda función $u(a, b)$ con las propiedades 1), 2), 3) podrá tomarse como punto de partida de *una teoría económica fundada en la noción de utilidad*. Es evidente que $u(a, b)$ está definida en la parte (1) del plano (a, b) cuando se define sobre uno de los dos semiejes positivos, sobre Ob, p. ej., porque toda línea de indiferencia (sobre la cual u es constante) corta Ob, y porque por todo punto de (1) pasa una línea de indiferencia, y una sola.

3) El análisis de los costos comparados y la programación:

El tema de los costos comparados fue estudiado por José Barral Souto (1903-1976), español, naturalizado argentino en 1928. La explicación clásica del comercio internacional, debida a David Ricardo, se basa en el principio de la *ventaja comparativa*, el cual según el mencionado autor tiene que ver con la *diferencial de costos de producción* de cada uno de los bienes en cada uno de los países.

No recordamos a Barral Souto por haber descubierto a Ricardo, o por haber contribuido a un conocimiento masivo de su análisis; sino por el hecho de que al tener que exponer la teoría ricardiana del comercio internacional, Barral Souto tuvo que *descubrir* una *herramienta apropiada*, ante la imposibilidad de representar dicha teoría con los medios entonces existente. Tal explicación fue publicada en 1940. Para muchos constituyó la base de la *programación lineal.*

Hasta Barral Souto, el tema de la división del trabajo o de la ventaja comparativa, se trató tomando en cuenta las productividades, o cantidades de cada bien que se obtienen por unidad de tiempo. Expongamos esta situación:

Sean: a_1, a_2, b_1, b_2 las productividades de los bienes a y b para los países 1 y 2

Si los tiempos son tiempos de trabajo total necesarios *para obtener una unidad de cada bien, entonces:*

$1/a_1 = A_{0a1}$, $1/a_2 = Ao_{a2}$

$1/b_1 = A_{0b1}$, $1lb_2 = Ao_{b2}$

son los costos- trabajo ricardianos.

Un caso como $a_1 / a_2 < b_1 / b_2$, o su equivalente Ao_{a1} / Ao_{a2} Ao_{b1} / Ao_{b2} indica que el país 1 tiene ventaja comparativa en B y el país 2 en A. Barral Souto incorporó el hecho de que además de consumir recursos las producciones, los recursos son escasos y su uso no puede exceder su disponibilidad ("finitud de la capacidad de producción total"). Por otra parte, un fenómeno de su tiempo, por la crisis de los años 30, era el subempleo de recursos.

La forma matemática del hecho económico son las in ecuaciones:

$Ao_{a1} \quad A_1 \quad + \quad Ao_{b1} \quad B_1 \leq \quad Ao_{a1} \quad ;$

$Ao_{a2} \quad A_2 \quad + \quad Ao_{b2} \quad B_z \leq \quad A_{02} \quad$, y

además: $A_1 \quad A_2 \quad . B_1 \quad B_2 \quad \geq \quad 0$

En este modelo no queda vestigio alguno de optimización neoclásica. Es un programa matemático, cuyo objeto de estudio es un conjunto factible convexo.

4) Equilibrio general y punto fijo:

El modelo de equilibrio general finalmente pareció hallar su forma definitiva en el trabajo conjunto de Arrow y Debreu (1954). Dentro de las críticas realizadas a Walras, se encontraban las del argentino Hugo Broggi (1923), y las de Neisser (1932), Stackelber (1933). Wald (1934) había encontrado una solución bajo condiciones restrictivas de la demanda. También John von Neumann (1937) encontraba una solución más amplia, luego de generalizar (1935) el teorema de punto fijo. Kakutani, a su vez, generalizó (1941) el teorema de von Neumann.. Recordemos, además. que Nash explicaba (1950) la existencia de una solución para juegos no cooperativos de n personas y Debreu demostró en 1952 la existencia del equilibrio competitivo en el modelo de Walras. El tema principal consistía en saber apreciar en la *práctica el sentido que todo esto tenía y cómo se computaban sus soluciones*. Precisamente, con esos objetivos, trabajó el argentino Rolf R. Mantel (dentro de lo que fué su tesis doctoral "Hacia una prueba constructiva de la existencia de equilibrio en una economía competitiva" (1968), con aportes muy valiosos y obteniendo una mención de la Universidad de Yale por su calidad superior. Mantel siempre pudo sentir, como Galileo, que las leyes del universo estaban escritas con caracteres matemáticos. Aseguraba que cualquier sección de la economía podía traducirse a la matemática, con tal de hallar la matemática adecuada.

5) Demanda excedente agregada:

Una función de demanda excedente del consumidor $i, z_i(p) = x_i(p, p.w_i) - w$, donde w es el valor de la dotación inicial del consumidor, se supone satisface tres propiedades: es continua, homogénea de grado cero y cumple la ley de León Walras (1834-1910 – Teoría del equilibrio general). Por simple suma de las demandas (excedentes) de un mismo bien por i consumidores, Walras obtenía la función de demanda (excedente) del mercado: $z(p) = \sum_i z_i\ (p)$. Ante este agregado así, surgió la inquietud¿ la función de mercado preserva las propiedades de la función individual?-

Estudios proporcionados por Hugo Sonnenschein se inclinaron en 1972 hacia una respuesta positiva, pero al argentino Rolf Mantel (1934-1999) correspondió la demostración, para cualquier número de mercancías, publicada en 1974. Perfeccionado el resultado por Gerard Debreu, profesor de Mantel diez años antes, se llama hoy " teorema de Sonnenschein-Mantel- Debreu".

6) Investigaciones relacionadas con las Economías distribucionales:

Los análisis económicos en base a teoremas, se fueron formulando bajo la influencia de Alfred Marshall (1842-1924) con el supuesto de la continuidad o bajo la línea de Joseph Schumpeter (1883-1950) con vaivenes o discontinuidades. Estas distintas formas de expresión, dieron origen a la posibilidad de conformar una estructura del análisis aceptando situaciones en las cuales, simultáneamente, se tuvieron en cuenta ambas formas. En este aspecto, Kaurent Schwartz ideó un sistema que contemplara el caso, pero su incorporación a la teoría es obra del argentino Julio H.G. Olivera.

Los trabajos de Olivera que han contribuido a traducir mediante funciones generalizadas los fundamentos del análisis económico a economías distribucionales son: "Producción y tiempo: teoría distribucional", "Conjuntos de producción distribucionales" (1986), "Conjuntos de consumo distribucionales" (1988), "Economías distribucionales con un continuo de agentes" (1992), "El enfoque distribucional de los hechos económicos" (1994).

(*) Director del Instituto de Investigaciones Económicas de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Morón
e-mail: avillafane@unimoron.edu.ar

Bibliografía

Broggi, Hugo, "Análsis Matemático" – 2 tomos. Bs.As - 1919.
Barral Souto J. "Principios fundamentales de la División del Trabajo" – Revista de Ciencias Económicas, marzo/abril 1940 – Bs.As.
Fernandez López M – "José Barral Souto y los orígenes de la programación lineal" – Actas de las 4tas. Jornadas de la Historia del Pensamiento Científico Argentino, Rosario – 1988.
Métodos cuantitativos en las Ciencias Sociales – Ensayo en honor de José Barral Souto – Edit. Macchi, Bs.As. 1979.
El Economista – "50 años de Economía Argentina "– Bs.As. 2001.
Gran Vox - Diccionario de Mat. – Edit. Bibliográfica SA – Barcelona 1994
Udaondo, Enrique - Diccionario Biográfico Colonial Argentino – Edit, Huarpes – Bs.As.

Indice

A modo editorial — Pág. 4

Sistemas de Ecuaciones Lienales — Pág. 5

Regresión Lineal usando Euler — Pág. 10

Una refencia histórica sobre la Economía Matemática en nuestro país — Pág. 12

Las opiniones vertidas en los trabajos que se publican son de exclusiva responsabilidad de sus autores

Staff

Director
Ing. S.D. Soldano

Redacción
Profesores de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Producido por la Gerencia de Medios y Comunicación - Universidad de Morón

Editor:
Lic. Alejandro Ninin

Diseño Grafico:
D.G. Marcela Pralóng

Impreso en los Talleres Gráficos de la Universidad de Morón

Año 6 Número 9

Registro de la propiedad intelectual SSN 0329-0255

Universidad de Morón
Cabildo 134 (B1708JPD) Morón
(011) 5627-2000 (líneas rotativas)
Fax: 5627-4598
E-mail: webmaster@unimoron.edu.ar
Internet: www.unimoron.edu.ar

Autoridades de la Universidad de Morón

Rector
Dr. Mario Armando Mena
Vicerrector de Desarrollo y Control de Gestión
Dr. Carlos Gowland
Vicerrector de Posgrado y Extensión Universitaria
Lic. Olga B. Villalba
Vicerrector Académico y de Investigación
Ing. Enrique L. Otero

Facultades

Agronomía
Decano Ing. Agr. Jorge Raúl Ottone
Vicedecano Ing. Agr. Antonio Angrisani
Arquitectura, Diseño, Arte y Urbanismo
Decano Arq. Oscar Borrachia
Ciencias Económicas y Empresariales
Decano Dr. Jorge Jorge Raúl Lemos
Vicedecano Dr. Jorge Emilio Salvel
Cs. Exactas, Químicas y Naturales
Decano Dr. Aquiles Ferranti
Vicedecano Dr. Néstor Pablo Boschetti
Derecho y Ciencias Sociales
Decano Dr. Norberto Porto Lemma
Vicedecano Dr. Dr. Bruno Oscar Corbo
Ciencias Aplicadas al Estudio Sistemático del Turísmo y la Población
Decano Lic. Alejandro Gavric
Vicedecana Traductora Pública Graciela Redona
Filosofía, Ciencias de la Educación y Humanidades
Decano Lic. Roberto Paterno
Vicedecana Prof. Ada Perez Wright
Informática, Cs. de la Comunicación y Técnicas Especiales
Decano Ing. Hugo Padovani
Vicedecana Ing. Oscar Roque Segre
Ingeniería
Decano Ing. Oscar Nuñez
Vicedecana Ing. Elisa Mestorino Bachofen
Medicina
Decano Dr. Domingo Liotta

Autoridades de la Fundación Universidad de Morón

Presidente
Dr. Mario Armando Mena
Vicepresidente
Sr. Ricardo Lirussi
Tesorero
Dr. Jorge Raúl Lemos
Secretario
Ing. Oscar Nuñez

UM